二次型教学中的一个问题 — 谈非退化线性替换

辛　林
福建师大数计学院

二次型教学中涉及到一个问题, 为什么对一个二次型进行变换, 要强调进行非退化线性替换？实际上非退化线性替换也不是很完美的，比如：椭圆经过非退化线性替换未必保持椭圆：例：

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, ab\neq 0}$$

经过非退化线性替换 $x=ax', y=by'$ ，化为圆方程 $x'^2+y'^2=1$. 非退化线性替换既包括了一些刚体运动，也包括一些非刚体运动，比如旋转变换，反射变换这些刚体运动都保持几何图形上任意两点间的距离不变，从而图形不变，而非刚体运动，如伸缩变换使图形发生变化，不能保持原有图形。

尽管如此，采用非退化线性替换至少有如下五点理由：

一、给出了二次型间的一个等价关系：如果记数域 K 上的 n 元二次型为 $QF_n(K)$, 对任意二个二次型 $f,g\in QF_n(K)$, 定义二元关系：$f(X)\sim g(Y)$ 当且仅当存在一个非退化线性替换 $X=PY$, 使得 $g(Y)=f(PY)$. 则 $\sim$ 是 $QF_n(K)$ 的一个等价关系，因此可对 $QF_n(K)$ 进行分类.

二、可还原性：如果二次型 $f(X)$ 经过非退化线性替换 $X=PY$ 得二次型 $g(Y)$, 则 $g(Y)$ 经过非退化线性替换 $Y=P^{-1}X$ 得 $f(X)$.

三、保证了二次型秩不变，从而在实二次型情况下保证惯性不变.

四、保证了根 root 之间的一一对应关系：n 元二次型 $f(X)$ 的 root 实根是指满足 $f(\alpha)=1$ 的 n 维向量 $\alpha\in K^n$. 例如椭圆方程 $\mathbf{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1, ab\neq 0}$, 其上的点正是二次型 $\mathbf{f(X)=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}}$ 的 root 实根. 我们记 n 元二次型 $f(X)$

的 root 实根集合为 $r(f)$, 那么有

定理 设 $f(X)$ 经过非退化线性替换 $X=PY$ 得到 $g(Y)$, 则 $\varphi: r(f)\to r(g): \alpha\mapsto P^{-1}\alpha$ 是双射.

证明 因为 $f(\alpha)=1$ ，则 $g(P^{-1}\alpha)=f(\alpha)=1$

五、保证了半正定实二次型的根 (radical) 空间的同构：一个 n 元实二次型 $f(X)$ 的根 radical 是指使 $f(\alpha)=0$ 的 n 维向量 $\alpha\in\mathbb{R}^n$. 关于二次型 $f(X)$ 的根 radical 的集合记为 $\mathrm{rad}(f)$.

引理 如果 f 是半正定型，则 $\mathrm{rad}(f)$ 是一个 $\mathbb{R}$- 向量空间.

证明 如果 $\alpha,\beta\in\mathrm{rad}(f)$, 则 $f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)=0$, 由于 f 是半正定的，所以 $f(\alpha+\beta)=0$. 对任意实数 r, $f(r\alpha)=r^2f(\alpha)=0$.

定理 设 $f(X)$ 是半正定实二次型，并且经过非退化线性替换 $X=PY$ 得到 $g(Y)$, 则 $\mathrm{rad}(f)\cong\mathrm{rad}(g)$.

证明 如果 $f(\alpha)=0$, 则 $g(P^{-1}\alpha)=f(\alpha)=0$. 因此 $\phi:\mathrm{rad}(f)\to\mathrm{rad}(g)$ 使 $\phi(\alpha)=P^{-1}\alpha$, 这是同构对应.

参考文献

[1] 丘维声，高等代数 *(第二版)*, 高等教育出版社， *2002.*